El área a partir de la ecuación polar de la frontera

Gabriela Sansigre Vidal
Área de Matemática Aplicada
E. T. S. Ingenieros Industriales

El área como integral de línea

Γ curva de Jordan $\circlearrowleft$

$D = \mathrm{int}\ (\Gamma)$, i. e. $\quad \partial D = \Gamma$

$$\Downarrow$$

$$A(D) = \frac{1}{2}\int_{\Gamma} -ydx + xdy$$

El área en polares

Expresión polar de Γ: $\rho = \rho(t), \quad t_0 \leq t \leq t_1$

Parametrización de Γ

$(x(t), y(t)) = (\rho(t)\cos t, \rho(t)\,\mathrm{sen}\, t), \quad t_0 \leq t \leq t_1$

$-y(t)x'(t) + x(t)y'(t) =$

$$A(D) = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}$$

Ejemplo I

Cardioide

$\rho(t) = a(1 + \cos t), \ \ a > 0$

$$A = \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}(1+\cos t)^2 dt =$$

Ejemplo II

Lemniscata de Bernoulli

$\rho^2(t) = a^2 \cos 2t, \;\; a > 0$

$$A_+ = \frac{a^2}{2} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos 2t \; dt =$$

Resumen

- Hemos considerado un recinto plano D cuya frontera es una curva de Jordan Γ y, usando la ecuación polar de Γ,
- hemos deducido una fórmula para el área:

$$A(D) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \rho^2(t) \; dt$$

- y la hemos aplicado al cálculo del área encerrada por una ♡ y por una ∞