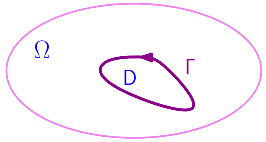
El área como integral de línea: una aplicación del teorema de Green

Gabriela Sansigre Vidal
Área de Matemática Aplicada
E. T. S. Ingenieros Industriales

El teorema de Green

$\Omega \subset \mathbb{R}^2$ simplemente conexo
$P, Q \in C^1(\Omega)$
$\Gamma \subset \Omega$ curva de Jordan $\circlearrowleft$
$D, \partial D = \Gamma$



$$\int_\Gamma Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

El área como integral de línea

$$P(x,y) = -y, \qquad Q(x,y) = x$$
$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \qquad \Rightarrow$$

$$\int_\Gamma -ydx + xdy = \iint_D (\qquad) \, dxdy =$$

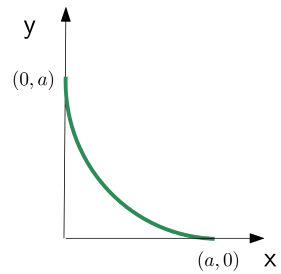
$$\Rightarrow \quad A(D) =$$

La astroide (I)

$$\Gamma \equiv x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}, \; a > 0$$

Parametrización:

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a \operatorname{sen}^3 t \end{cases} \qquad 0 \le t \le 2\pi$$



La astroide (II)

El área que encierra

$$A = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} -ydx + xdy$$

$-y(t)x'(t) + x(t)y'(t) =$

La astroide (III)

Las cuentas:

$$A = \frac{3a^2}{2} \int_0^{2\pi} \cos^2 t \operatorname{sen}^2 t \; dt =$$

Resumen

- Hemos considerado un recinto plano D cuya frontera es una curva de Jordan Γ
- Hemos expresado el área de D como integral de línea
  $A(D) = \dfrac{1}{2} \displaystyle\int_{\Gamma} -ydx + xdy, \quad \Gamma$ recorrida $\circlearrowleft$
- Y hemos aplicado la fórmula para calcular el área encerrada por una astroide.