La integral de probabilidad

Gabriela Sansigre Vidal
Dpto. Matemática Aplicada
E. T. S. Ingenieros Industriales

Una integral impropia

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx =$$ integrando par

$$= 2 \lim \int^{R}$$ def. integral impropia

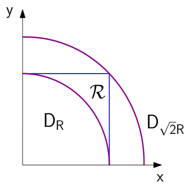
¿Cálculo directo?

- $$\frac{d}{dx}(??) = e^{-x^2}$$
- ¡No existe primitiva elemental!

De simple a doble

$$\left(\int_0^R e^{-x^2}\, dx \right)^2 =$$

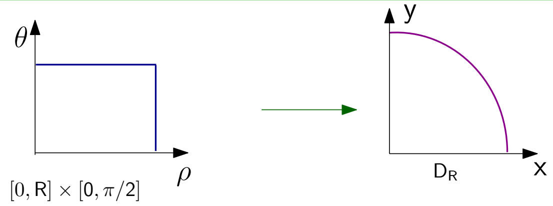
Acotando



$\mathcal{R} = [0, R] \times [0, R]$ entre dos sectores circulares

$$< \iint_{\mathcal{R}} e^{-(x^2+y^2)}\, dxdy <$$

El cambio a polares



$$(\rho, \theta) \mapsto (x, y) = (\rho \cos\theta, \rho \operatorname{sen}\theta)$$

El jacobiano

$$J(\rho, \theta) =$$

Integrando en sectores

$$\iint_{D_R} e^{-(x^2+y^2)}\, dxdy = \int_0^{\pi/2}\int_0^{R}$$

$$= \frac{\pi}{2}$$

$$\iint_{D_{\sqrt{2}R}} e^{-(x^2+y^2)}\, dxdy =$$

Tomando límites

$$\frac{\pi}{4}(1 - e^{-R^2}) < \iint_{\mathcal{R}} e^{-(x^2+y^2)}\, dxdy < \frac{\pi}{4}(1 - e^{-2R^2})$$

$$\lim_{R\to\infty} \quad \downarrow$$

$$\leq \qquad \left(\int_0^{\infty} e^{-x^2}\, dx\right)^2 \qquad \leq$$

Resultados

- La integral de probabilidad ...

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$$

- y la función gamma de Euler en $1/2$...

$$\Gamma(1/2) = \int_0^{\infty} e^{-x}x^{-1/2}\,dx$$

se relacionan mediante el cambio $x = y^2$:

$$\Gamma(1/2) = 2\int_0^{\infty} e^{-y^2}\,dy = \sqrt{\pi}$$

Resumen

- Hemos definido la integral de probabilidad,
- la hemos relacionado con una integral doble,
- hemos acotado entre dos sectores circulares,
- hemos integrado en coordenadas polares,
- hemos tomado límites y concluido que la integral converge y coincide con $\Gamma(1/2)$:

$$\Gamma(1/2) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$$