Campos conservativos

Gabriela Sansigre Vidal
Área de Matemática Aplicada
E. T. S. Ingenieros Industriales

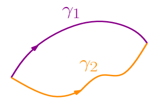
Equivalencias y definición

$D \subset \mathbb{R}^n$ abierto y conexo; $\mathbf{F} \in C(D)$

1. $\forall\ \Gamma \subset D$ cerrada, $\displaystyle\oint_\Gamma \mathbf{F} = 0$

2. $\forall\ \gamma_1, \gamma_2 \subset D$ con iguales extremos,

$$\int_{\gamma_1} \mathbf{F} = \int_{\gamma_2} \mathbf{F}$$



3. $\exists\ \varphi \in C^1(D) \quad \mathbf{F} = \nabla\varphi$, φ función potencial.

$\mathbf{F}$ es **conservativo** $\Leftrightarrow$ (1) $\Leftrightarrow$ (2) $\Leftrightarrow$ (3)

Una condición necesaria en $\mathbb{R}^2$

$$\mathbf{F} = (P, Q) \in C^1(D)\ \wedge\ \mathbf{F} = \nabla\varphi$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

Conjuntos simplemente conexos

$D \subset \mathbb{R}^2$ abierto y conexo es simplemente conexo si $\forall\ \gamma \subset D$ de Jordan, el interior geométrico de γ no contiene puntos frontera de D.

simplemente conexo, conexo pero no simple

Una condición necesaria y suficiente

$\Omega \subset \mathbb{R}^2$ simplemente conexo; $\quad P, Q \in C^1(\Omega)$

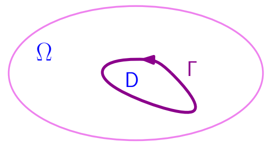
$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

$$\Updownarrow$$

$\mathbf{F} = (P, Q)$ es conservativo en Ω

El teorema de Green

$\Omega \subset \mathbb{R}^2$ simplemente conexo
$P, Q \in C^1(\Omega)$
$\Gamma \subset \Omega$ curva de Jordan $+$,
$D, \partial D = \Gamma$



$$\int_\Gamma Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

¡¡Precaución!!

- $M \subset \mathbb{R}^2$ abierto, conexo; $\mathbf{F} = (P, Q) \in C(M)$,
- Puede darse
$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}, \qquad \int_\Gamma Pdx + Qdy \neq 0$$
- ... pero también:
$$\frac{\partial Q}{\partial x} \neq \frac{\partial P}{\partial y}, \qquad \mathbf{F} = \nabla \varphi$$

Resumen

- Hemos definido el concepto de campo conservativo,
- hemos visto una condición necesaria y suficiente para campos C^1 en conjuntos “sin agujeros”