Obtención de un potencial escalar

Gabriela Sansigre Vidal
Área de Matemática Aplicada
E. T. S. Ingenieros Industriales

Existencia de un potencial

$$P(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}, \; Q(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}, \; x \geq 1$$

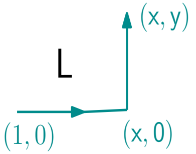
$$\mathbf{F} = (P,Q) = \nabla\varphi \Leftrightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} =$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} =$$

Obtención de un potencial (1)

Integremos $\mathbf{F}(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2}(-y,x)$ a lo largo de



$$\varphi(x,y) = \int_L Pdu + Qdv =$$

$$= \int$$

Obtención de un potencial (2)

$$(P,Q) = \nabla\varphi \Leftrightarrow P = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \;\wedge\; Q = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

Integramos la segunda ecuación en la variable y,

$$\int Q(x,y)dy = \int \frac{x}{x^2+y^2}dy =$$

$$\Rightarrow \varphi(x,y) =$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = P \Rightarrow$$

Obtención de un potencial (3)

$$\int P(x,y)dx \cdots \ \psi(x,y) = -\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x}{y}\right) + c, \ y \neq 0$$

$$¿c \text{ para que } \psi \in C^2 \text{ en } x \geq 1?$$

$$\lim_{y\to 0^+} \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{y\to 0^-} \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x}{y}\right) = -\frac{\pi}{2}$$

$$\psi(x,y) = \begin{cases} -\operatorname{arc\,tg}(x/y) & y > 0 \\ -\pi/2 & y = 0 \\ -\operatorname{arc\,tg}(x/y) - & y < 0 \end{cases}$$

Resumen

- Hemos comprobado que el campo

$$\mathbf{F}(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}(-y,x)$$

  es conservativo en dominios simplemente conexos de $\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$,
- hemos calculado un campo potencial escalar en el semiplano $x \geq 1$ por dos procedimientos distintos.

¿Paradoja?

$\nabla\varphi = \nabla\psi \Rightarrow$

$\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{y}{x}\right) + \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x}{y}\right) =$

por tanto $\varphi - \psi =$

POLITÉCNICA