CAMPOS EN DOMINIOS NO SIMPLEMENTE CONEXOS

María Elena Domínguez Jiménez
ETSII-Universidad Politécnica de Madrid

Definiciones y resultados anteriores

- Un conjunto $D \subset \mathbb{R}^2$ es **simplemente conexo** si toda curva de Jordan en D tiene interior contenido en D.
- D simplemente conexo, $\mathbf{F} = (F_1, F_2) \in C^1(D)$:

$$\mathbf{F} \text{ es conservativo en } D \iff \frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y} \text{ en } D. \qquad (1)$$

- ¿Ocurre lo mismo si D **NO es simplemente conexo**?

Ejemplo 1: Campo conservativo

$$\mathbf{F}(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}(x, y)$$

- $D = \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ es conexo pero no simplemente conexo.
- $\mathbf{F}$ es conservativo en D pues $\mathbf{F} = \nabla\left(\frac{1}{2}\log\left(x^2 + y^2\right)\right)$
- $\mathbf{F}$ cumple (1)

Ejemplo 2: Campo NO conservativo

$$\mathbf{G}(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}(-y, x)$$

- $\mathbf{G}$ está definido en $D = \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$
- $\mathbf{G}$ cumple (1) en D.
- PERO $\mathbf{G}$ NO es conservativo en D:

RESUMEN:

Sea D un conexo y **F** de clase $C^1(D)$:

$$\mathbf{F} \text{ es conservativo en } D \Longrightarrow \frac{\partial}{\partial} = \qquad \text{en } D.$$

1. Si D es simplemente conexo,

$$\mathbf{F} \text{ es conservativo en } D \qquad \frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y} \text{ en } D.$$

2. Si D NO es simplemente conexo,

$$\mathbf{F} \text{ es conservativo en } D \qquad \frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y} \text{ en } D.$$